

重み多項式に関する話題¹
大浦 学²(高知大学理学部数理情報科学科)

今日、議論したいのは次の問題です。複素数体 \mathbb{C} 上有限生成な環があって生成元を固定し

$$\mathbb{C}[f_1, f_2, \dots] = \mathbb{C}[f_1, f_2, \dots, f_n],$$

任意の f_i を f_1, \dots, f_n の多項式として表した場合

$$\forall f_i, f_i = \sum c_{* \dots *} f_1^{*} f_2^{*} \cdots f_n^{*},$$

係数 $c_{* \dots *}$ としてどのような数が現れるか。 \mathbb{C} の元ではあるが、取り扱う環によってはもう少し小さくてもよい場合があるだろう、という訳です。環としてここで取り扱うのは符号理論からくるものです。今述べた問題は生成元の取り方に依存しますが、生成元達の情報がより多く得られるだろうと考えています。今日、お話しする内容は

Y.Choie and M.Oura,

The joint weight enumerators and Siegel modular forms

から取りました。Section 1 で後の議論に必要な符号理論、モジュラ形式について述べた後、Section 2 で種数 1 の場合、Section 3 で種数 2 の場合の上の問題を議論します。

1. 符号理論とジーゲルモジュラ形式. 二元体を \mathbb{F}_2 とし、二元体上 n 次元ベクトル空間 \mathbb{F}_2^n には自然な内積 $u \cdot v = \sum u_i v_i$ が入っているものとします。 \mathbb{F}_2^n の元 u に対し、0 ではない座標の個数を u の重さと言い、 $wt(u)$ で表すことにします。長さ n の線型符号とは \mathbb{F}_2^n の部分空間のことを言います。この講演では単に長さ n の符号と呼ぶことにします。我々が扱う符号はよい性質を持つことが望めます。その期待に沿う符号として、次に自己双対重偶符号を定義します。符号 \mathcal{C} はその双対符号

$$\mathcal{C}^\perp := \{u \in \mathbb{F}_2^n \mid u \cdot v = 0, \forall v \in \mathcal{C}\}$$

と一致する ($\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$) とき、自己双対であると言われます。重偶符号であるとは、 \mathcal{C} の全ての元の重さが 4 の倍数となるときに言います。自己双対かつ重偶符号を自己双対重偶符号と言います。自己双対重偶符号は長さ n が 8 の倍数のときに存在し、またそのときのみ存在することが知られております。次に例を述べます。 n を 8 の倍数としたとき、次の $n/2$ 個のベクトルで生成される長さ n の自己双対重偶符号を d_n^+ と書きます:

$$\frac{n}{2} \left\{ \begin{array}{l} (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0), \\ (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0), \\ \vdots \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 1, 1, 1, 1), \\ (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0). \end{array} \right.$$

これを $\frac{n}{2} \times n$ 行列と見立てて、 d_n^+ の生成行列と呼ぶことがあります。 $n = 8$ の場合のみ、 e_8 と書くことにします。 e_8 はパラメータ $[8, 4, 4]$ を持つハミング符号と呼ばれています。今日の話してでくるもう一つの自己双対重偶符号として、パラメータ $[24, 12, 8]$ を持つゴレーイ符号 g_{24} がありますが、具体的な生成元を書くのを省略します。

¹仙台数論及び組合せ論小研究集会 2004 (2005 年 1 月 24 日 ~ 25 日) における講演記録。

²科研費 (No.14740081) より補助を受けています。

次に符号から得られる多項式、重み多項式についてお話しします。長さ n の符号 C の重み多項式は

$$W_C(x, y) := \sum_{v \in C} x^{n-wt(v)} y^{wt(v)}$$

で定義されます。これは以下に述べる立場から言いますと、種数 1 の重み多項式ということになります。一般の種数 g に対して、重み多項式を定義します。 g 個の C の元 v_1, v_2, \dots, v_g と $a \in \mathbf{F}_2^g$ に対して

$$n_a(v_1, v_2, \dots, v_g) := \#\{i \mid a = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{gi})\}$$

とおきます。これは

$$\begin{aligned} v_1 &= (\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \hline \end{array}), \\ v_2 &= (\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \hline \end{array}), \\ &\vdots \\ v_g &= (\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline v_{g1} & v_{g2} & \cdots & v_{gn} \\ \hline \end{array}) \end{aligned}$$

と書いたとき、縦に四角で囲った \mathbf{F}_2^g のベクトル達のなかで a と等しいものが何個現れるかを数えていることとなります。さて、長さ n の符号の種数 g の重み多項式は次で定義されます:

$$W_C^{(g)}(x_a : a \in \mathbf{F}_2^g) := \sum_{v_1, v_2, \dots, v_g \in C} \prod_{a \in \mathbf{F}_2^g} x_a^{n_a(v_1, v_2, \dots, v_g)}.$$

この多項式は、次数 n の非負整数係数斉次多項式です。上で種数 1 の重み多項式の定義を書きましたが、 $x = x_0, y = x_1$ とすると今与えた定義と一致することが確認できます。自己双対重偶符号の種数 g の重み多項式達で生成される \mathbf{C} 上の環を $\mathfrak{W}(g)$ で表すことにします。自己双対重偶符号が存在するための必要十分条件が n が 8 の倍数であることを考えると $\mathfrak{W}(g) = \mathbf{C} \oplus \mathfrak{W}(g)_8 \oplus \mathfrak{W}(g)_{16} \oplus \cdots$ という次数付き環であることが分かります。ここで各変数 x_a の次数を 1 と考えて次数をつけていることに注意します。

次にモジュラ形式について復習します。 $H_g := \{\tau \in \text{Mat}_{g \times g}(\mathbf{C}) \mid {}^t \tau = \tau, \frac{\tau - \bar{\tau}}{2\sqrt{-1}} > 0\}$ を種数 g のジューゲル上半空間、 $\Gamma_g := Sp_g(\mathbf{Z})$ を種数 g のモジュラ群とします。 H_g 上の正則関数 $\varphi(\tau)$ で

$$\varphi((a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}) = \det(c\tau + d)^k \varphi(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g$$

を満たすものをモジュラ群 Γ_g に関する重さ k のモジュラ形式というのでした ($g = 1$ のときは尖点に関する条件が必要です)。これらにより生成される次数付き環を $A(\Gamma_g) = \mathbf{C} \oplus A(\Gamma_g)_1 \oplus A(\Gamma_g)_2 \oplus \cdots$ と表すことにします。もう少し条件をきつとしたモジュラ形式を考えてみます。モジュラ形式はフーリエ展開

$$\varphi(\tau) = \sum_s a_f(s) \exp(2\pi\sqrt{-1} \text{trace}(s\tau))$$

を持ちます。ここで s は g 次半整数かつ半正定値行列全体をわたります。 $A(\Gamma_g)$ の元 f で全ての s に対して $a_f(s) \in \mathbf{Z}$ となるもの全体がなす \mathbf{Z} -加群を $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_g)$ と書くことにします。

次に符号理論を利用したモジュラ形式の構成法を述べます。 $a, b \in \mathbf{F}_2^g$ に対してテータ定数を

$$\theta_{ab}(\tau) := \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} \exp 2\pi\sqrt{-1} \left\{ \frac{1}{2} {}^t \left(n + \frac{a}{2} \right) \tau \left(n + \frac{a}{2} \right) + \left(n + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{b}{2} \right\}$$

と定義します。写像 $Th: x_a \mapsto \theta_{a0}(2\tau)$ は長さ n の自己双対重偶符号 C を Γ_g に関する重さ $n/2$ のモジュラ形式 $Th(W_C^{(g)})$ へと写し、 \mathbf{C} 代数準同型写像 $Th: \mathfrak{W}(g) \rightarrow A(\Gamma_g)^{(4)}$ を引き起こします。ここで $A(\Gamma_g)^{(4)} = \mathbf{C} \oplus A(\Gamma_g)_4 \oplus A(\Gamma_g)_8 \oplus \cdots$ です。この写像 Th は、 $g = 1, 2$ の場合、 $\mathfrak{W}^{(g)}$ と $A(\Gamma_g)^{(4)}$ の間の同型写像となることが知られています。次に $Th(W_C^{(g)})$ が格子のテータ函数として捉えられることを説明します。自己双対重偶符号 $C \subset (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ に対して、自然な射影 $\rho: \mathbf{Z}^n \rightarrow (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ の逆像として得られる $\Lambda_C := \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{-1}(C)$ は even unimodular な格子となります。このとき、 $Th(W_C^{(g)})$ は格子のテータ函数 $\vartheta_{\Lambda_C}^{(g)}$ と一致します:

$$Th(W_C) = \vartheta_{\Lambda_C}^{(g)} := \sum_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_g \in \Lambda_C} \prod_{i,j} \exp \pi \sqrt{-1} (\ell_i \cdot \ell_j) \tau_{ij}.$$

格子のフーリエ展開を考えることにより、特に $Th(W_C^{(g)}) \in A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_g)^{(4)}$ も理解されると思います。

2. 種数 1 の場合. この Section では種数 1 の場合を取り扱います。重み多項式を W_C と書くことにし、変数は、 x_0, x_1 ではなく、 x, y を用いることにします。種数 1 の多項式は \mathbf{C} 上代数的独立な二つの元

$$\begin{aligned} W_{e_8} &= x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \\ W_{g_{24}} &= x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24} \end{aligned}$$

で生成されることが知られています (Gleason, 1970). よって任意の自己双対重偶符号 C をとってきたとき、その重み多項式 W_C は W_{e_8} と $W_{g_{24}}$ の多項式として一意的に表されます。例えば、N.J.A.Sloane のホームページ (<http://www.research.att.com/~njas>) にある長さ 32 の自己双対重偶符号のリストの 50 番目の符号 $C_{32,50}$ を考えると

$$W_{C_{32,50}} = \frac{1}{42}W_{e_8}^4 + \frac{2}{42}W_{e_8}W_{g_{24}}$$

と書けます。ここで係数が $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$ の元であることに注目します。逆に任意に自己双対重偶符号をとってきて二つの生成元 $W_{e_8}, W_{g_{24}}$ の多項式として表した場合、その係数に $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$ 以外の元は現れないことを示しましょう。 C を任意の自己双対重偶符号とします。 $Th(W_C)$ は $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_1)$ の元です。 $A_{\mathbf{Z}}(\Gamma_1)$ は重さ 4 のアイゼンシュタイン級数 $E_4 = 1 + \cdots$ と重さ 12 の尖点形式 $\Delta = \exp 2\pi\sqrt{-1}\tau + \cdots$ の整数係数の多項式として表されることが知られています。関係式

$$\Delta = \frac{1}{2^5 3 \cdot 7} (Th(W_{e_8})^3 - Th(W_{g_{24}}))$$

を使いますと、

$$\begin{aligned} Th(W_C) &= \sum c_{ab} E_4^a \Delta^b \quad (c_{ab} \in \mathbf{Z}) \\ &= \sum c_{ab} Th(W_{e_8})^a \left\{ \frac{1}{2^5 3 \cdot 7} (Th(W_{e_8})^3 - Th(W_{g_{24}}))^b \right\} \\ &= \sum \widetilde{c_{a' b'}} Th(W_{e_8})^{a'} Th(W_{g_{24}})^{b'} \end{aligned}$$

です。よって

$$W_C = \sum \widetilde{c_{a' b'}} W_{e_8}^{a'} W_{g_{24}}^{b'}, \quad \widetilde{c_{a' b'}} \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}]$$

が得られ、上の主張は示されました。

3. 種数 2 の場合. この Section では種数 2 の場合を取り扱います. 重み多項式を W_C と簡略化した形で書くことにします. $\mathfrak{W}(2)$ は四つの代数的独立な元 $W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{40}^+}$ と $W_{d_{32}^+}$ で \mathbb{C} 上生成されます (Duke, 1993). 具体的な自己双対重偶符号 d_{48}^+ に対して、その重み多項式は

$$\begin{aligned} W_{d_{48}^+} = & 23 \cdot 22229 \cdot 2^{-2} 3^{-2} 5^{-1} 7^{-2} 41^{-1} W_{e_8}^6 - 2^5 13 \cdot 23 \cdot 3^{-2} 7^{-2} 11^{-1} 41^{-1} W_{e_8}^3 W_{g_{24}} \\ & + 2 \cdot 23 \cdot 113 \cdot 3^{-2} 7^{-1} 11^{-1} 41^{-1} W_{e_8}^3 W_{d_{24}^+} - 3^2 5 \cdot 23 \cdot 2^{-2} 41^{-1} W_{e_8}^2 W_{d_{32}^+} \\ & + 2^4 7 \cdot 23 \cdot 3^{-1} 5^{-1} 41^{-1} W_{e_8} W_{d_{40}^+} - 2^9 19 \cdot 3^{-2} 7^{-2} 11^{-2} W_{g_{24}}^2 \\ & + 2^6 23 \cdot 3^{-2} 7^{-1} 11^{-2} W_{g_{24}} W_{d_{24}^+} + 2 \cdot 23 \cdot 37 \cdot 3^{-2} 11^{-2} W_{d_{24}^+}^2 \end{aligned}$$

と一意的に表されます. 逆に、任意の自己双対重偶符号の種数 2 の重み多項式を $W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{40}^+}, W_{d_{32}^+}$ 達の多項式として表した場合、その係数には $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}]$ 以外の元は現れないことを示しましょう. C を任意の自己双対重偶符号とします. $Th(W_C)$ は $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma)^{(4)}$ の元です. ここでまず $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)$ に関する結果を述べておきます. 次の 15 個の $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)$ の元

$$X_4, X_6, X_{10}, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, X_{18}, X_{24}, X_{28}, X_{30}, X_{35}, X_{36}, X_{40}, X_{42}, X_{48}$$

は $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)$ の極小の (すなわち、どの一つも取り除けない) 生成系であることが知られています (井草準一, 1979). ここで生成元 X_k の添字 k はジーゲルモジュラ形式としての重さを表しています. 各 X_k の具体的な記述は省略します. この井草の定理より、次の補題が導かれます.

補題 1. $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ は、 \mathbb{Z} 上

$$X_4, X_{12}, Y_{12}, X_{16}, X_{24}, X_{28}, X_{36}, X_{40}, X_{48},$$

かつ

$$\begin{aligned} & X_6^2, \quad X_6 X_{10}, \quad X_6 X_{18}, \quad X_6 X_{30}, \quad X_6 X_{42}, \quad X_6 X_{35}^2, \\ & \quad X_{10}^2, \quad X_{10} X_{18}, \quad X_{10} X_{30}, \quad X_{10} X_{42}, \quad X_{10} X_{35}^2, \\ & \quad \quad X_{18}^2, \quad X_{18} X_{30}, \quad X_{18} X_{42}, \quad X_{18} X_{35}^2, \\ & \quad \quad \quad X_{30}^2, \quad X_{30} X_{42}, \quad X_{30} X_{35}^2, \\ & \quad \quad \quad \quad X_{42}^2, \quad X_{42} X_{35}^2, \\ & \quad \quad \quad \quad \quad X_{35}^4 \end{aligned}$$

で生成される.

これら 30 個の元は $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ の \mathbb{Z} 上の極小の生成系ではありませんが、我々の議論にはこのままで十分です. この補題により $Th(W_C)$ は上記 30 個の元の整数係数多項式として表されます.

補題 2. 補題 1 で与えられた $A_{\mathbb{Z}}(\Gamma_2)^{(4)}$ の生成元はすべて

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][Th(W_{e_8}), Th(W_{g_{24}}), Th(W_{d_{24}^+}), Th(W_{d_{32}^+}), Th(W_{d_{40}^+})].$$

の元である.

以上により $Th(W_C)$ が

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][Th(W_{e_8}), Th(W_{g_{24}}), Th(W_{d_{24}^+}), Th(W_{d_{32}^+}), Th(W_{d_{40}^+})]$$

の元であること、従って W_C が

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{41}][W_{e_8}, W_{g_{24}}, W_{d_{24}^+}, W_{d_{32}^+}, W_{d_{40}^+}]$$

の元であることが示され、主張が得られました.