Some results on the graded rings coming from coding theory

大浦 学 (Manabu OURA)
札幌医科大学医学部数学教室

還暦をむかえられた小関道夫先生 (山形大学) の初期の業績について, 特に二つの論文に注目したいと思います. テータ級数と似た性質を持つ級数について調べた論文 [5] と, 種数 2 のジーゲルモジュラ形式の重さが 4 の倍数であるような環の生成元を, 偶ユニモジュラ格子のテータ級数を用いてあらわした論文 [6] について, それらに関連する事柄も含めて解説します. その後に, Steven Dougherty (Scranton 大, アメリカ), Aaron Gulliver (Victoria 大, カナダ) との共著のなかで符号に関する次数付き環を決定しましたので, その部分について報告します.
この講演 (およびこの報告) のタイトルは, 内容を的確にあらわすものではありませんが, プログラムのままにしておきました.

筆者が聞いたかぎりでは, 先生は整数論, 特に二次形式への興味から研究を始められ, テータ級数, モジュラ形式の研究へと進んでいかれたと思います. ここで取り上げた二つの論文は, その特徴をあらわすものと思います.

1. 論文 [5] について. この節では主に種数 (genus) が 1 の場合のモジュラ形式を取り扱うことになります.

$\Gamma_1 = SL(2, \mathbf{Z})$ に関する整数係数のモジュラ形式のなす環は, 代数的独立な二つのアイゼンシュタイン級数 $\mathfrak{E}_2(\tau)$, $\mathfrak{E}_3(\tau)$ で生成することができます. ここで τ は上半平面上の点をあらわします. 長さ n の偶ユニモジュラ格子のテータ級数は, 重さ $n/2$ のモジュラ形式となりますが, そのフーリエ係数は, 非負整数であり, 定数項は 1 です. この論文では次の問題を考えます.

> 定数項が 1 である, 非負整数のフーリエ係数を持つ重さ 12, 16 のモジュラ形式を全て求めよ.

ところで重さが 12 であるアイゼンシュタイン級数 $\mathfrak{E}_6(\tau)$ は, 次のフーリエ展開を持ちます:

$$\mathfrak{E}_6(\tau) \quad = \quad 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) e^{2\pi i n\tau}$$

ここで, $\sigma_{11}(n) = \sum_{d|n,\ d>0} d^{11}$. また, 重さ 12 の尖点形式 $\Delta(\tau)$ は次のフーリエ展開を持ちます:

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n\tau},$$

ここで $\tau(1)=1,\ \tau(2)=-24,\ \tau(3)=252,\ \tau(4)=-1472,\ \tau(5)=4830,\ldots$ です.
また偶ユニモジュラ格子のテータ級数との関係は

$$\begin{aligned}\vartheta_{E_8^3}(\tau) &= \mathfrak{E}_6(\tau)+\left(720-\frac{65520}{691}\right)\Delta(\tau),\\ \vartheta_{D_{24}^+}(\tau) &= \mathfrak{E}_6(\tau)+\left(1104-\frac{65520}{691}\right)\Delta(\tau)\end{aligned}$$

となります.

$\varphi(\tau)$ を定数項 1 の非負整数フーリエ係数を持つ, 重さ 12 のモジュラ形式とします. すると

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= s\vartheta_{E_8^3}(\tau)+t\vartheta_{D_{24}^+}(\tau)\\ &= (s+t)\left(\mathfrak{E}_6(\tau)-\frac{65520}{691}\Delta(\tau)\right)+(720s+1104t)\Delta(\tau)\end{aligned}$$

と書くことができます. ここで, $s,\ t$ は複素数です. 今,

$$\varphi(\tau)=1+\sum_{n=1}^{\infty}b(n)e^{2\pi in\tau}$$

とおくと, $s+t=1$ の条件を考えると

$$b(n)=\frac{65520}{691}(\sigma_{11}(n)-\tau(n))+(1104-384s)\tau(n) \tag{1}$$

が得られます. $(65520,691)=1$ に注意します. 故に全ての自然数 n に対して $b(n)$ が非負整数であればいいわけです. 低い n については

$$\begin{aligned}b(1) &= 1104-384s\\ b(2) &= 3\cdot 66520-24(1104-384s)\end{aligned}$$

となります.

まず, $1104-384s$ が整数ならば, ラマヌジャンの合同式

$$\sigma_{11}(n)\equiv\tau(n)\pmod{691}$$

とあわせて, (1) より, 全ての自然数 n に対して $b(n)$ は整数であることが分かります.

次に, $b(1),\ b(2)$ が零以上, つまり

$$-7086\le 384s\le 1104$$

という条件 (整数条件は入っていない) から, $n\ge 2$ ならば $b(n)\ge 0$ という事実が示されます. この部分の証明は幾つか補題を必要とします.

以上から

Theorem 1 in [5]. $\varphi(\tau)$ が定数項 1 の非負整数フーリエ係数を持つ重さ 12 のモジュラ形式である為の必要十分条件は, $384s$ が整数であり, かつ $-7086 \leq 384s \leq 1104$ を満たすことである. そのような $\varphi(\tau)$ は 8191 個ある.

重さが 16 の場合のそのようなモジュラ形式の数は 19343 です (**Theorem 2** in [5]).

似たような問題の符号版を考えてみます.
二元符号の重み多項式は

$$W_C(x,y) = \sum_{v \in C} x^{n-\mathrm{wt}(v)} y^{\mathrm{wt}(v)}$$

で定義されます. ここで, $\mathrm{wt}(v)$ は $v_i = 1$ となる i の数をあらわします. 全ての自己双対重偶符号の重み多項式で生成される $\mathbf{C}$ 上の環を $\mathfrak{W}$ と書くと, これは代数的独立な二つの元 $W_{e_8}(x,y),\ W_{g_{24}}(x,y)$ で $\mathbf{C}$ 上生成された環であることが知られています.

$$I_8 = W_{e_8}(x,y),\ I_{24} = W_{g_{24}}(x,y)$$

とおきます. I の添字は斉次多項式としてのそれぞれの次数をあらわしています. さて, $\mathfrak{W}$ の次数 24 の元で

x^{24} の係数は 1
他の係数は非負整数

であるようなものの数をかぞえてみます (ここで, $\mathfrak{W}$ の元は全て変数 x, y に関して対称であることに注意しておきます). 実際, そのような元を φ と書きますと,

$$\begin{aligned} \varphi &= sI_8^3 + tI_{24} \\ &= (s+t)x^{24} + 42sx^{20}y^4 + (591s + 759t)x^{16}y^8 + (2828s + 2576t)x^{12}y^{12} + \cdots \end{aligned}$$

と書くことができます. ここで $s,\ t$ は複素数です. 先の条件を実際に書き下すと

$s + t = 1,$
$42s,\ 591s + 759t, 2828s + 2576t$ は全て非負整数

となります. この条件を満たす φ は, 少々計算をしますと

$$42s = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 189$$

に対応した 190 個があることになります.

2. 論文 [6] について. この節では主に種数が 2 の場合のモジュラ形式を取り扱うことになります.

$\Gamma_2 = Sp(4,\mathbf{Z}) \subset GL(4,\mathbf{Z})$ に関するジーゲルモジュラ形式の成す環 $A(\Gamma_2)$ は, 代数的独立な四つのアイゼンシュタイン級数 $\psi_4,\ \psi_6,\ \psi_{10},\ \psi_{12}$ と重さが 35 の尖点形式 χ_{35} で生成されることが知られています. 2 次のジーゲル上半空間の点をあらわす τ は省略します. χ_{35}^2 は上にあげた四つのアイゼンシュタイン級数の多項式としてあらわすことができるので, ここでの話には関係ありません.

重さが偶数のモジュラ形式で生成される環 $A(\Gamma_2)^{(2)}$ は, 四つのアイゼンシュタイン級数 $\psi_4,\ \psi_6,\ \psi_{10},\ \psi_{12}$ で生成され, その次元公式は

$$\begin{aligned}\sum_k \dim A_{2k}(\Gamma_2) &= \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})} \\ &= 1 + t^4 + t^6 + t^8 + 2t^{10} + 3t^{12} + 2t^{14} + 4t^{16} + 4t^{18} + 5t^{20} + \cdots\end{aligned}$$

となります. ここではとくに $t^4,\ t^{12},\ t^{16},\ t^{20}$ の係数, つまり

$$\dim A_4(\Gamma_2) = 1,\ \dim A_{12}(\Gamma_2) = 3,\ \dim A_{16}(\Gamma_2) = 4,\ \dim A_{20}(\Gamma_2) = 5 \tag{2}$$

が後で必要となります.

さて, 重さが 4 の倍数であるようなモジュラ形式が成す環 $A(\Gamma_2)^{(4)}$ の構造を知りたいのですが, その為に

$$4p_1 + 6p_2 + 10p_3 + 12p_4 = 4q$$

を満たす非負整数の五つ組 $(p_1, p_2, p_3, p_4; q)$ の成す加法的モノイドを考えます. これは重さが $4q$ のモジュラ形式 $\psi_4^{p_1}\psi_6^{p_2}\psi_{10}^{p_3}\psi_{12}^{p_4}$ に対応しています. このモノイドは

$$(1,0,0,0;1),\ (0,2,0,0;3),\ (0,1,1,0;4),\ (0,0,2,0;5),\ (0,0,0,1;3)$$

で生成することができるので,

$$A(\Gamma_2)^{(4)} = \mathbf{C}[\psi_4,\ \psi_6^2,\ \psi_6\psi_{10},\ \psi_{10}^2,\ \psi_{12}]$$

となります. これら生成元の重さはそれぞれ 4, 12, 16, 20, 12 ですので, もし (2) を満たす十分な数のモジュラ形式が得られれば, $A(\Gamma_2)^{(4)}$ の生成元をすべて含んでいることになります. 実際, 次にそのような元を与えます.

$A(\Gamma_2)^{(4)}$ の生成元を与える為に, 格子から得られるテータ級数を考えます.

次元 n の偶ユニモジュラ格子から得られる種数 2 のテータ級数は, 重さ $n/2$ のジーゲルモジュラ形式の例を与えています. 偶ユニモジュラ格子が存在するのは, n が 8 の倍数である時, またその時のみに限られますので, 得られたモジュラ形式は $A(\Gamma_2)^{(4)}$ の元であることが分かります. そこで次のような環を考えます:

$$R = \mathbf{C}[\vartheta_{E_8},\ \vartheta_{A_{24}},\ \vartheta_{D_{24}^+},\ \vartheta_{D_{32}^+},\ \vartheta_{D_{40}^+}].$$

R が $A(\Gamma_2)^{(4)}$ に含まれるのは当然ですが, 実は一致します. 上の議論から示すべきことは次です:

ϑ_{E_8} が 1 次元ベクトル空間をなすこと,

$\vartheta_{E_8}^3$, $\vartheta_{A_{24}}$, $\vartheta_{D_{24}^+}$ が 3 次元ベクトル空間をなすこと,

$\vartheta_{E_8}^4$, $\vartheta_{E_8}\vartheta_{A_{24}}$, $\vartheta_{E_8}\vartheta_{D_{24}^+}$, $\vartheta_{D_{32}^+}$ が 4 次元ベクトル空間をなすこと,

$\vartheta_{E_8}^5$, $\vartheta_{E_8}^2\vartheta_{A_{24}}$, $\vartheta_{E_8}^2\vartheta_{D_{32}^+}$, $\vartheta_{E_8}\vartheta_{D_{32}^+}$, $\vartheta_{D_{40}^+}$ が 5 次元ベクトル空間をなすこと.

これより次の定理が得られます:

Theorem in [6] 環 $A(\Gamma_2)^{(4)}$ は $\mathbf{C}$ 上 ϑ_{E_8}, $\vartheta_{A_{24}}$, $\vartheta_{D_{24}^+}$, $\vartheta_{D_{32}^+}$, $\vartheta_{D_{40}^+}$ で生成することができる.

W. Duke は論文 [2] において, この定理を応用して, 自己双対重偶符号に対する種数 2 の重み多項式のなす環 $\mathfrak{W}^{(2)}$ (この記号は後で定義されます) を決定しました.

論文 [6] においてもそうですが, ジーゲルモジュラ形式のフーリエ係数は重要な役割を果たします. 小関先生は, 具体的にフーリエ係数を求めた論文[1], フーリエ係数のもつ性質を与えた論文, フーリエ係数を求める為に必要な議論を行った論文等を幾つか発表されております.

また, 小関先生のお仕事に少なからず関係していると思われる種数 3 のジーゲルモジュラ形式環の問題や, アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の問題については, [14], [4] の結果が知られています.

3. 論文 [1] について. 論文 [1] において符号に関連して, ある種類の重み多項式のなす環を決定したので報告します.

言葉の定義をします.

$\mathbf{F}_2^n$ の部分空間 D に対して

$$\|D\| = \sharp\{i;\ {}^{\exists}v \in D,\ v_i \neq 0\}$$

とおきます.

二元線型符号 C に対して r 番目の一般化されたハミング重さ $d_r(C)$ は

$$d_r(C) = \mathrm{Min}\{\|D\|;\ D \text{ は } C \text{ の次元 } r \text{ の部分空間}\}$$

で定義されますが, ここでは特に必要ではありません.

符号 C に対して次のような斉次多項式 (r-th higher weight enumerator) を定義します:

$$H_C^{(r)}(x,y) = \sum_{D\subset C,\ \dim D = r} x^{n-\|D\|}y^{\|D\|}.$$

[1] 小関先生は知っておられましたが, 論文 [9] の p.10, Table II の T_9, $k=10$ は 14980 0950$\underline{5}$73120 のミスプリントです.

全ての自己双対重偶符号 C の $H_C^{(k)}(x,y),\ 0\le k\le r,$ 達で $\mathbf{C}$ 上生成される環 $\mathfrak{H}^{(r)}$ を考えます. この環を決定したいのですが, それには今まで研究されてきた別の斉次多項式を利用することにします.

符号 C に対して種数 g の重み多項式を

$$W_C^{(g)}(x_a)=W_C^{(g)}(x_a : a\in \mathbf{F}_2^g)=\sum_{v_1,\dots,v_g\in C}\prod_{a\in\mathbf{F}_2^g} x_a^{n_a(v_1,\dots,v_g)},$$

ここで $n_a(v_1,\dots,v_g)$ は $a=(v_{1i},\dots,v_{gi})$ となるような i $(1\le i\le n)$ の数をあらわします.

長さ n の自己双対重偶符号の種数 g の重み多項式で生成される $\mathbf{C}$ 上の環を $\mathfrak{W}^{(g)}$ であらわします. 第一章の後半部分にでできた $\mathfrak{W}$ は, 種数が 1 の場合にあたります: $\mathfrak{W}=\mathfrak{W}^{(1)}$. $\mathfrak{W}^{(g)}$ は一般種数に対して, ある有限群の不変式環と等しいことが知られています. 具体的な結果については, 次元公式については種数 4 まで, 生成元等を含めた構造は種数 2 までの場合が知られています. $\mathfrak{W}^{(1)}$ は代数的独立な二元 $W_{e_8}^{(1)}(x_a),\ W_{g_{24}}^{(1)}(x_a)$ で生成されます. $\mathfrak{W}^{(2)}$ は代数的独立な四元 $W_{e_8}^{(2)}(x_a),\ W_{g_{24}}^{(2)}(x_a),\ W_{d_{24}^+}^{(2)}(x_a),\ W_{d_{40}^+}^{(2)}(x_a)$ と $W_{d_{32}^+}^{(2)}(x_a)$ で生成されます. $W_{d_{32}^+}^{(2)}(x_a)$ の二乗は代数的独立な四元の多項式としてあらわされます. $\mathfrak{W}^{(2)}$ の構造は先にも述べましたように, 論文 [6] の Theorem を応用して得られた結果です (W. Duke [2]). $\mathfrak{W}^{(2)}$ はある有限群の不変式環として理解することもできます.

符号に関連して, 二つの斉次多項式 $H_C^{(r)}(x,y),\ W_C^{(g)}(x_a)$ を定義した訳ですが, $H_C^{(r)}(x,y)$ は二変数であるのに対し, $W_C^{(g)}(x_a)$ は 2^g-変数あります. そこで次のような変数の特殊化を行います:

$$x_a \longrightarrow \begin{cases} x, & a=0\in\mathbf{F}_2^g \text{ の場合},\\ y, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

この特殊化を行った $W_C^{(g)}(x_a)$ を $W_C^{(g)}(x,y)$ と書くことにしますと, $H_C^{(r)}(x,y)$ との関係は次で与えられます:

$$W_C^{(g)}(x,y)=\sum_{0\le r\le g}[g]_r H_C^{(r)}(x,y), \tag{3}$$

ここで $1\le g\le \dim C,\ [g]_0=1,\ [g]_r=(2^g-1)(2^g-2)\cdots(2^g-2^{r-1})$ $(r\ge 1)$ です. 実際,

$$
\begin{aligned}
W_C^{(g)}(x,y) &= \sum_{v_1,\ldots,v_g\in C} x^{n_0(v_1,\ldots,v_g)} y^{n-n_0(v_1,\ldots,v_g)} \\
&= \sum_{r=0}^{g} \sum_{\substack{v_1,\ldots,v_g\in C \\ \dim\langle v_1,\ldots,v_g\rangle = r}} x^{n_0(v_1,\ldots,v_g)} y^{n-n_0(v_1,\ldots,v_g)} \\
&= \sum_{r=0}^{g} \sum_{\substack{D\subset C \\ \dim D = r}} \sharp\{(v_1,\ldots,v_g)\in C^g; \langle v_1,\ldots,v_g\rangle = D\} \\
&\quad \times x^{n_0(v_1,\ldots,v_g)} y^{n-n_0(v_1,\ldots,v_g)} \\
&= \sum_{r=0}^{g} \sum_{\substack{D\subset C \\ \dim D = r}} [g]_r x^{n_0(v_1,\ldots,v_g)} y^{n-n_0(v_1,\ldots,v_g)} \\
&= \sum_{r=0}^{g} [g]_r \sum_{\substack{D\subset C \\ \dim D = r}} x^{n-\|D\|} y^{\|D\|} \\
&= \sum_{r=0}^{g} [g]_r H_C^{(r)}(x,y),
\end{aligned}
$$

すなわち (3) が得られます.

この公式を利用して, $W_C^{(g)}(x_a)$ の持つ性質を $H_C^{(r)}(x,y)$ の性質へと翻訳することができますが, ここでは省略します.

低い g について計算してみますと,

$$
\begin{aligned}
W_C^{(1)}(x,y) &= H_C^{(0)}(x,y) + H_C^{(1)}(x,y), \\
W_C^{(2)}(x,y) &= H_C^{(0)}(x,y) + 3H_C^{(1)}(x,y) + 6H_C^{(2)}(x,y), \\
W_C^{(3)}(x,y) &= H_C^{(0)}(x,y) + 7H_C^{(1)}(x,y) + 42H_C^{(2)}(x,y) + 168H_C^{(3)}(x,y)
\end{aligned}
$$

が得られます.

簡単な例をあげます. 符号の長さを n としますと, 常に $H_C^{(0)}(x,y) = x^n$ となります. また, これから $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathbf{C}[x^8]$ であることが分かります. 拡張されたハミング符号 e_8 については,

$$
H_{e_8}^{(1)}(x,y) = W_{e_8}^{(1)}(x,y) - H_{e_8}^{(0)}(x,y) = 14x^4y^4 + y^8
$$

となります.

$\mathfrak{H}^{(r)}$ の構造について考えていきます.

上で述べましたように, $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathbf{C}[x^8]$ です.

さて, $\mathfrak{H}^{(1)}$ についてですが,

$$
\begin{aligned}
X_8 &= H_{e_8}^{(0)}(x,y), \quad Y_8 = H_{e_8}^{(1)}(x,y), \\
X_{24} &= H_{g_{24}}^{(1)}(x,y) = 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24}
\end{aligned}
$$

とし，これらで生成される $\mathbf{C}$ 上の環を $\mathfrak{R}$ とします．ここで X_8, Y_8, X_{24} の添字は斉次多項式としての次数をあらわしています ($\mathfrak{H}^{(2)}$ の時も同じような書き方をします)．この時，$\mathfrak{H}^{(1)}$ は $\mathfrak{R}$ と一致します．実際，$\mathfrak{H}^{(1)} \supset \mathfrak{R}$ は明かなので，逆を示します．任意の自己双対重偶符号 C の重み多項式 $W_C^{(1)}(x,y)$ は，$\mathfrak{W}^{(1)} = \mathbf{C}[W_{e_8}^{(1)}(x,y), W_{g_{24}}^{(1)}(x,y)]$ という事実より，ある二変数多項式 $P(*,*)$ を用いて $W_C^{(1)}(x,y) = P(W_{e_8}^{(1)}(x,y), W_{g_{24}}^{(1)}(x,y))$ としてあらわすことができます．ところで (3) より

$$\begin{aligned} H_C^{(1)} &= W_C^{(1)}(x,y) - H_C^{(0)}(x,y) \\ &= P(W_{e_8}^{(1)}(x,y), W_{g_{24}}^{(1)}(x,y)) - x^n \\ &= P(X_8+Y_8, X_8^3+X_{24}) - X_8^{n/8} \\ &= \widetilde{P}(X_8, Y_8, X_{24}) - X_8^{n/8} \quad (\widetilde{P}(*,*,*) \text{ はある三変数多項式}) \end{aligned}$$

となるので，$H_C^{(1)}$ は $\mathfrak{R}$ の元であることが分かります．つまり $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{R}$ が言えました．

後は，Gröbner 基底の理論を使って計算しますと，

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \mathbf{C}[X_8, Y_8](1 \oplus X_{24}),\ X_8,\ Y_8 \text{ は代数的独立}$$

ということが分かります．

同様な方法で，$\mathfrak{H}^{(2)}$ の場合も考えることができます．

$$\begin{aligned} &X_8,\ Y_8,\ X_{24} \text{ は } \mathfrak{H}^{(1)} \text{ の時と同じ}, \\ &Z_8 = H_{e_8}^{(2)}(x,y),\ Y_{24} = H_{g_{24}}^{(2)}(x,y) \end{aligned}$$

とおきますと，

$$\mathfrak{H}^{(2)} = \mathbf{C}[X_8, Y_8](1 \oplus Z_8 \oplus Z_8^2 \oplus Z_8^3) \oplus \mathbf{C}[X_8]X_{24} \oplus \mathbf{C}[X_8]Y_{24}$$

が得られます．

我々の論文 [1] の中で議論されているもう一つの関係式を述べます．

$\mathbf{F}_2^n$ の元 $v_1, \ldots, v_g$, 及び $\mathbf{F}_2^g$ の部分空間 F に対して，$P_F(v_1, \ldots, v_g)$ という記号は全ての i に対して $(v_{1i}, \ldots, v_{gi}) \in F$ である，を意味するとします．この時，

$$\begin{aligned} [g]_g H_C^{(g)}(x,y) = W_C^{(g)}(x,y) + \sum_{\substack{F \subset \mathbf{F}_2^g \\ \dim F = g-1}} W_C^{(g)} \left(x_a \mapsto \begin{cases} x & a = 0 \in \mathbf{F}_2^g \\ y & a \in F \backslash \{0\} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \right) \\ - \sum_{v_1,\ldots,v_g \in C} (\sharp\{F \subset \mathbf{F}_2^g; \dim F = g-1,\ P_F(v_1,\ldots,v_g)\} - 1)\, x^{n_0(v_1,\ldots,v_g)} y^{n-n_0(v_1,\ldots,v_g)} \end{aligned}$$

が成り立ちます．特に $g=2$ の場合は，

$$
\begin{aligned}
6H_C^{(2)}(x,y) &= W_C^{(2)}(x,y,y,y) - W_C^{(2)}(x,0,0,y) - W_C^{(2)}(x,0,y,0) - W_C^{(2)}(x,y,0,0) \\
&\quad +2x^n
\end{aligned}
$$

となります.

この講演に関連して, 横山和弘先生 (九州大) には Gröbner 基底について, 桂田英典先生 (室蘭工大) には小関先生のお仕事についての話を伺いました. また, 原田昌晃先生 (山形大) からはこの原稿に対するコメントを頂きました. どうもありがとうございました.

参考文献

[1] Dougherty, S., Gulliver, A., Oura, M., Higher weights and graded rings for binary self-dual codes, preprint.

[2] Duke, W., On codes and Siegel modular forms, Inter. Math. Res. Notices, No. 5 (1993), 125–136.

[3] Igusa, J., On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. Math. **84** (1962), 175–200; (II), *ibid.*, **86** (1964), 392–412.

[4] Katsurada, H., An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.

[5] Ozeki, M., On modular forms whose Fourier coefficients are non-negative integers with the constant term unity, Math. Ann. **206** (1973), 187-203.

[6] Ozeki, M., On basis problem for Siegel modular forms of degree 2, Acta Arithmetica, **31** (1976), 17–30.

[7] Ozeki, M., On a relation satisfied by Fourier coefficients of theta-series of degree one and two, Math. Ann. **222** (1976), 225-228.

[8] Ozeki, M., On a property of Siegel theta-series, Math. Ann. **228** (1977), 249-258.

[9] Ozeki, M., Washio, T., An extended table of the Fourier coefficients of Eisenstein series of degree two. Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ., Nat. Sci. 23, No.1 (1982), 1-16. Corrigenda 23, No.2, 16 (1983).

[10] Ozeki, M., Washio, T., Table de coefficients Fourieriens des series d'Eisenstein de degre deux, II, Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ., Nat. Sci. 23, No.2 (1983), 1-15.

[11] Ozeki, M., Washio, T., Explicit formulas for the Fourier coefficients of Eisenstein series of degree 3, J. Reine Angew. Math. **345** (1983), 148-171.

[12] Ozeki, M., Washio, T., Table of the Fourier coefficients of Eisenstein series of degree 3, Proc. Japan Acad., Ser. A 59 (1983), 252-255.

[13] Runge, B., Codes and Siegel modular forms, Discrete Math. **148** (1996), 175–204.

[14] Tsuyumine, S., On Siegel modular forms of degree three, Amer. J. Math. **108** (1986), 755–862. Addendum (1986), 1001-1003.